Dans tout le problème E désigne un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Un endomorphisme f de E est *nilpotent* lorsqu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $f^p = 0$ (où, bien entendu, $f^p = f \circ \dots \circ f$). Le plus petit entier naturel p tel que $f^p = 0$ est appelé *l'indice de nilpotence* de f et est noté $\nu(f)$.

On note $\mathcal{N}(E)$ l'ensemble des endomorphismes nilpotents de E .

Partie I

Dans cette partie uniquement, on prend $E = \mathbb{R}^3$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ défini pour tout $(x, y, z) \in E$ par

$$f(x, y, z) = (3x + 9y - 9z, 2x, 3x + 3y - 3z)$$

1. Déterminer $\ker f$, $\dim(\ker f)$ et $\dim(\operatorname{Im} f)$.
2. Déterminer f^2 , $\ker f^2$, $\dim(\ker f^2)$ et $\dim(\operatorname{Im} f^2)$.
3. Montrer que $f \in \mathcal{N}(E)$ et calculer $\nu(f)$.

Partie II

1. Soient f et g deux endomorphismes de E .
 - (a) On suppose que $f \in \mathcal{N}(E)$ et $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $f \circ g \in \mathcal{N}(E)$.
 - (b) On suppose que $f \circ g \in \mathcal{N}(E)$. Montrer que $g \circ f \in \mathcal{N}(E)$. *Attention, on ne suppose plus ici que f et g commutent.*
 - (c) On suppose que $f, g \in \mathcal{N}(E)$ et $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $f + g \in \mathcal{N}(E)$.
 - (d) On suppose que $f \in \mathcal{N}(E)$. Montrer que $\operatorname{id}_E - f \in \operatorname{GL}(E)$.
2. Soit $f \in \mathcal{N}(E)$. On pose, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $N_p = \ker f^p$.
 - (a) Déterminer $N_{\nu(f)}$.
 - (b) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $N_p \subset N_{p+1}$.
 - (c) On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $N_p = N_{p+1}$. Montrer que pour tout $q \in \mathbb{N}$, $N_p = N_{p+q}$.
3. Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie n . Soit $f \in \mathcal{N}(E)$.
 - (a) Montrer que la suite $(\dim N_p)_{0 \leq p \leq \nu(f)}$ est strictement croissante.
 - (b) En déduire que $\nu(f) \leq n$.

Partie III

Dans cette partie, on suppose que E est de dimension finie n .

On se donne $f \in \mathcal{N}(E)$ tel que $\nu(f) = n$. On note $C(f)$ l'ensemble des endomorphismes g de E tels que $f \circ g = g \circ f$.

1. Montrer qu'il existe $e \in E$ tel que $f^{n-1}(e) \neq 0$.
On fixe désormais un tel vecteur e .

2. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (e, f(e), \dots, f^{n-1}(e))$ est une base de E .
3. Montrer que $C(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ et un sous-anneau de $\mathcal{L}(E)$.
4. Soit $g \in C(f)$.
 - (a) On pose

$$g(e) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(e)$$

où $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ sont les coordonnées de $g(e)$ dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que pour tout $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$,

$$g(f^j(e)) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(f^j(e))$$

- (b) En déduire que

$$g = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k$$

5. (a) Montrer que $C(f) = \text{Vect}(id_E, f, f^2, \dots, f^{n-1})$.
- (b) Quelle est la dimension de $C(f)$?

On justifiera évidemment les réponses à ces deux questions. Aucune des deux justifications n'est immédiate.