

Les affirmations sans justification ne seront pas prises en compte par le correcteur pour la note finale. Les résultats doivent être encadrés. Les calculatrices sont interdites.

On admet le résultat suivant, que l'on appellera lors des justifications la *croissance de l'intégrale*. Si f et g sont deux fonctions continues sur un segment $[a, b]$ (où $a < b$) à valeurs réelles et $f \leq g$, alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \, dt$$

Les intégrales W_n sont les *intégrales de Wallis*.

Partie I

1. Calculer W_0 , W_1 et W_2 .
2. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que pour tout entier $n \geq 2$,

$$W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2}$$

3. (a) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$W_{2p+1} = \frac{2^{2p} p!^2}{(2p+1)!}$$

- (b) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p} p!^2} \frac{\pi}{2}$$

Partie II

1. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = nW_n W_{n+1}$. Montrer que u_n tend vers $\pi/2$ lorsque n tend vers l'infini.
2. Montrer que la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0.
3. Montrer que lorsque n tend vers l'infini, $W_n \sim W_{n+1}$.
4. Montrer que lorsque n tend vers l'infini,

$$W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

5. Quelle est la limite de W_n lorsque n tend vers l'infini ?

Partie III

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} \, dt$$

On se propose de déterminer la limite de $F(x)$ lorsque le réel x tend vers $+\infty$.

1. (a) Montrer que la fonction F est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
- (b) Montrer que pour tout réel $x \geq 1$,

$$F(x) \leq 1 + \int_1^x e^{-t} \, dt$$

- (c) Montrer que la fonction F a une limite réelle en $+\infty$.
2. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + x \leq e^x$.
- (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in \mathbb{R}$,

$$1 - \frac{t^2}{n} \leq e^{-t^2/n} \leq \frac{1}{1 + \frac{t^2}{n}}$$

- (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0, \sqrt{n}]$,

$$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2} \leq \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- (a) Montrer que

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \, dt$$

- (b) En posant $t = \sqrt{n} \sin \theta$, calculer l'intégrale

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt$$

en fonction d'une intégrale de Wallis.

- (c) Montrer au moyen d'un changement de variable que

$$\int_0^{\sqrt{n}} \frac{dt}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n} = \sqrt{n} \int_0^{\pi/4} \cos^{2n-2} \theta \, d\theta$$

On pensera à la fonction tangente.

- (d) En déduire que $\sqrt{n}W_{2n+1} \leq F(\sqrt{n}) \leq \sqrt{n}W_{2n-2}$.
4. Montrer que $F(\sqrt{n})$ a une limite lorsque l'entier n tend vers $+\infty$ et calculer cette limite.
5. Par III.1.c, la fonction F a une limite en $+\infty$. Que vaut cette limite ?
- On rappelle la consigne donnée à la première ligne du sujet.*