Ce problème vise à construire la fonction logarithme et à démontrer ses principales propriétés au moyen de suites réelles. Il est donc hors de question d'utiliser des logarithmes.

Il sera tenu compte de la présentation, de l'orthographe et de la rédaction. Les résultats devront être $\boxed{\text{encadrés}}$. Les calculatrices sont autorisées.

Contrainte : on impose de ne jamais utiliser la notation « lim » pour la rédaction de ce devoir.

Partie I

1. On considère les deux suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ définies pour tout $n \geq 1$ par

$$u_n = \sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{p=n}^{2n-1} \frac{1}{p}$$

   (a) Montrer que ces deux suites sont adjacentes.

   (b) Déterminer un encadrement à 10^{-1} près de leur limite commune ℓ (c'est-à-dire deux réels α et β tels que $\alpha \leq \ell \leq \beta$ et $\beta - \alpha \leq 10^{-1}$). On justifiera évidemment la réponse donnée.

2. Soit $k \geq 2$ un entier *fixé*. On considère les deux suites $(u_n^k)_{n\geq 1}$ et $(v_n^k)_{n\geq 1}$ définies pour tout $n \geq 1$ par

$$u_n^k = \sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad v_n^k = \sum_{p=n}^{kn-1} \frac{1}{p}$$

   Bien que noté en position supérieure, k ne désigne donc pas une puissance.

   (a) Démontrer que la suite $(u_n^k)_{n\geq 1}$ est croissante. On pourra écrire

$$\frac{1}{n+1} = \frac{1}{kn+k} + \cdots + \frac{1}{kn+k} \quad (k \text{ termes})$$

   (b) Démontrer que la suite $(v_n^k)_{n\geq 1}$ est décroissante.

   (c) Démontrer que $u_n^k - v_n^k$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

   Les suites $(u_n^k)_{n\geq 1}$ et $(v_n^k)_{n\geq 1}$ sont donc adjacentes. On note $L(k)$ leur limite commune. On a donc pour tout entier k non nul

$$\sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L(k)$$

   On convient également de poser $L(1) = 0$.

3. Soient $k, k' \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

   (a) Démontrer que pour tout $n \geq 1$, $u_n^{kk'} = u_n^k + u_{nk}^{k'}$.

   (b) En déduire que $L(kk') = L(k) + L(k')$.

4. Vérifier que l'égalité $L(kk') = L(k) + L(k')$ reste vraie si k ou k' est égal à 1.

5. Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$.

   (a) Prouver que $\frac{1}{k+1} \leq L(k+1) - L(k) \leq \frac{1}{k}$.

   (b) En déduire que $L(k+p) - L(k) \leq \frac{p}{k}$.

   (c) Démontrer également que si $k > p$, alors $L(k-p) - L(k) \leq -\frac{p}{k}$.

Partie II

Pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout entier naturel n, on note $x_n = \lfloor 10^n x \rfloor$ où $\lfloor t \rfloor$ désigne la partie entière du réel t. Le réel x_n est donc caractérisé par

$$x_n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad x_n \leq 10^n x < x_n + 1$$

1. Dans cette question, on fixe un réel $x \in \mathbb{R}_+^*$. On pose

   $$u_n = L(x_n) - nL(10) = L(x_n) - L(10^n)$$

   la seconde égalité étant vraie d'après I.3.

   (a) Démontrer que $x_n > 1$ pour n assez grand (on rappelle qu'il est interdit d'utiliser des logarithmes). La suite (u_n) est donc définie à partir d'un certain rang n_0.

   (b) Démontrer que pour tout $n \geq n_0$, $10x_n \leq x_{n+1}$.

   (c) Démontrer, en utilisant I.5.a, que la fonction L de la première partie est croissante, et en déduire que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est croissante.

   (d) Soit k un entier tel que $x \leq k$. Démontrer que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq L(k)$.

   (e) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est convergente. On note $L(x)$ sa limite.

   (f) Lorsque x est entier, on dispose donc de *deux* définitions concurrentes de $L(x)$: $L_I(x)$ défini dans la partie I, et $L_{II}(x)$ défini dans cette partie. C'est très gênant : démontrer donc que $L_I(x) = L_{II}(x)$.

2. Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. On note pour tout entier naturel n, $x_n = \lfloor 10^n x \rfloor$, $y_n = \lfloor 10^n y \rfloor$ et $z_n = \lfloor 10^{2n} xy \rfloor$.

   (a) Montrer que $x_n y_n \leq z_n < (x_n + 1)(y_n + 1)$.

   (b) Montrer que pour tout $n \geq n_0$, $L(x_n + 1) \leq L(x_n) + \frac{1}{x_n}$.

   (c) En déduire que $L(xy) = L(x) + L(y)$.

3. Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$.

   (a) On suppose $x > 1$. Démontrer que $L(x) \leq x - 1$. On utilisera I.5.b avec $k + p = x_n$ et $k = 10^n$. *Il convient bien évidemment de vérifier que l'on peut utiliser I.5.b avec ces valeurs !*

   (b) Établir la même inégalité lorsque $x < 1$.

   (c) Démontrer que $L(x) \geq 1 - \frac{1}{x}$. On pourra auparavant démontrer que $L(x) + L(\frac{1}{x}) = 0$.

   (d) Démontrer que $1 - \frac{x}{y} \leq L(y) - L(x) \leq \frac{y}{x} - 1$.

4. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $(y_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels strictement positifs convergeant vers x.

   (a) Montrer que $L(y_n)$ tend vers $L(x)$ lorsque n tend vers l'infini. Que peut-on en déduire concernant la fonction L ?

   (b) On suppose que pour tout entier n, $y_n \neq x$. Montrer que

   $$\frac{L(y_n) - L(x)}{y_n - x} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \frac{1}{x}$$

   Que peut-on en déduire concernant la fonction L ?