Ce devoir comporte trois exercices indépendants. Il sera tenu compte de la présentation, de l'orthographe et de la rédaction. Les résultats devront être $\boxed{\text{encadrés}}$. Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1

Dans cet exercice, E désigne un ensemble. Pour toute partie X de E, on note $\overline{X} = E \setminus X$.

On définit une opération $\oplus$ sur l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E en posant pour tous $A, B \in \mathcal{P}(E)$,

$$A \oplus B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$$

1. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Déterminer $A \oplus \emptyset$, $A \oplus E$ et $A \oplus A$.
2. Montrer que pour tous $A, B \in \mathcal{P}(E)$, $A \oplus B = B \oplus A$. Comment s'appelle cette propriété ?
3. Soient $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Soit $x \in E$. Compléter la table de vérité ci-dessous.

$x \in A$	$x \in B$	$x \in C$	$x \in A \oplus B$	$x \in B \oplus C$	$x \in (A \oplus B) \oplus C$	$x \in A \oplus (B \oplus C)$
0	0	0				
0	0	1				
0	1	0				
0	1	1				
1	0	0				
1	0	1				
1	1	0				
1	1	1				

   Quelle propriété de l'opération $\oplus$ peut-on déduire de cette table ? On rappelle que **toute** affirmation doit être justifiée.

4. Soient $A_1, A_2, A_3, A_4 \in \mathcal{P}(E)$. Soit $x \in E$. Montrer que x appartient à $A_1 \oplus \ldots \oplus A_4$ si et seulement si x n'appartient à aucun des A_i ou x appartient à deux des A_i ou x appartient à tous les A_i.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{P}(E)$. Soit $x \in E$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante simple pour que x appartienne à $A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$.
   Une bonne réponse sans démonstration sera valorisée. Une démonstration sera bien entendu encore plus valorisée.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout réel x par

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

1. Étudier la fonction f et tracer sa courbe.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note

$$E_x = \{y \in \mathbb{R}, f(y) = f(x)\}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Soit $y \in \mathbb{R}$. Montrer que $y \in E_x$ si et seulement si $(x - y)(xy - 1) = 0$.
   (b) Déterminer l'ensemble E_x. Il y a deux cas à considérer.
   (c) Combien d'éléments l'ensemble E_x possède-t-il ? Il y a un certain nombre de cas à considérer.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $g(x)$ le plus grand élément de l'ensemble E_x.
   (a) Calculer $g(x)$ pour tout réel x.
   (b) Tracer la courbe de la fonction g.

Exercice 3

On rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $[\![0, n]\!] = \{0, 1, \ldots, n\}$.

On se donne dans cet exercice une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de réels positifs ou nuls vérifiant

- $u_0 = 0$.
- Pour tout $n \geq 1$,

$$(\star) \quad u_n \leq n - 1 + \max\{u_k + u_{n-1-k}, k \in [\![0, n-1]\!]\}$$

Pour tout réel $\mu > 0$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit la proposition $P(\mu, n)$ par

$$P(\mu, n) = « u_n \leq \mu n(n-1) »$$

1. Quels sont les réels $\mu > 0$ pour lesquels on a $P(\mu, 0)$?
2. Soit $n \geq 1$. On suppose trouvé un réel $\mu > 0$ tel que pour tout entier $k \in [\![0, n-1]\!]$, on ait $P(\mu, k)$.
   (a) On considère la fonction $f : [0, n-1] \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in [0, n-1]$ par

   $$f(x) = x(x-1) + (n-1-x)(n-2-x)$$

   Quel est le maximum de f ? Où est-il atteint ?
   (b) Montrer que $u_n \leq n - 1 + \mu(n-1)(n-2)$.
   (c) En déduire que si $\mu \geq \frac{1}{2}$, alors on a $P(\mu, n)$.
3. Montrer qu'il existe un réel $\mu > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $P(\mu, n)$.
   On apportera un soin tout particulier à la rédaction de cette question.
4. Soit $(v_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par récurrence forte par
   - $v_0 = 0$
   - Pour tout $n \geq 1$,

   $$v_n = n - 1 + \max\{v_k + v_{n-1-k}, k \in [\![0, n-1]\!]\}$$

   Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n en fonction de n.