Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul. On note $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$.

Partie I

On munit le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ de la probabilité uniforme $\mathbb{P}_n$.

Pour tous $i, k \in [\![1, n]\!]$, soit $X_{i,k} : \mathfrak{S}_n \longrightarrow \{0, 1\}$ définie par $X_{i,k}(\sigma) = 1$ si i appartient à une orbite de σ de cardinal k et $X_{i,k}(\sigma) = 0$ sinon.

1. Soient $i, k \in [\![1, n]\!]$. On pose $A_{i,k} = \{X_{i,k} = 1\}$, de sorte que $X_{i,k} = \mathbb{1}_{A_{i,k}}$.
   (a) Comment construit-on un élément de $A_{i,k}$?
   (b) En déduire $|A_{i,k}| = (n-1)!$, puis la loi de $X_{i,k}$.

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, soit

$$X_k = \sum_{i=1}^{n} X_{i,k}$$

2. Soient $k \in [\![1, n]\!]$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Que représente $X_k(\sigma)$? On attend ici une phrase courte et intelligible.
3. Déterminer, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{E}(X_k)$.

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, soit

$$Y_k = \frac{1}{k} X_k$$

4. Soient $k \in [\![1, n]\!]$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Que représente $Y_k(\sigma)$? Déterminer $\mathbb{E}(Y_k)$.

Soit

$$Z_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$$

5. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Que représente $Z_n(\sigma)$? Déterminer $\mathbb{E}(Z_n)$ ainsi qu'un équivalent de $\mathbb{E}(Z_n)$ lorsque n tend vers l'infini.

Partie II

Dans cette partie, $(\Omega, \mathfrak{T}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé. On se donne une suite $(U_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires réelles indépendantes définies sur Ω. On suppose que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $U_i \sim \mathcal{U}([\![1, i]\!])$.

Pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, on note $\tau(i, j)$ la permutation de $\mathfrak{S}_n$ qui échange i et j et laisse les autres éléments de $[\![1, n]\!]$ invariants. Si $i = j$, alors $\tau(i, j) = \mathrm{id}_{[\![1,n]\!]}$. Sinon, $\tau(i, j)$ est la transposition $(i\ j)$.

Soit $S_n : \Omega \longrightarrow \mathfrak{S}_n$ définie pour tout $\omega \in \Omega$ par

$$S_n(\omega) = \tau(1, U_1(\omega)) \circ \ldots \circ \tau(n, U_n(\omega))$$

1. Dans cette question, on identifie $\mathfrak{S}_n$ et l'ensemble des permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}$ telles que $\sigma(n+1) = n+1$.

(a) Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}$. Soit $a = \sigma^{-1}(n+1)$.

   i. Soit $\omega \in \Omega$. On suppose que $S_{n+1}(\omega) = \sigma$. Montrer que $U_{n+1}(\omega) = a$.

   ii. En déduire $\{S_{n+1} = \sigma\} = \{S_n = \sigma \circ \tau(n+1, a)\} \cap \{U_{n+1} = a\}$.

(b) En déduire que $S_n \sim \mathcal{U}(\mathfrak{S}_n)$. On pourra procéder par récurrence sur n.

2. La question 1 suggère un algorithme pour obtenir une permutation « aléatoire » de $\mathfrak{S}_n$. En admettant que l'évaluation de `random.randint(1, i)` renvoie $U_i(\omega)$ (où $\omega \in \Omega$), écrire une fonction Python qui prend en paramètre un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et renvoie $S_n(\omega)$. Les complexités spatiale et temporelle de cette fonction devront être en $O(n)$.

3. On rappelle que $Z_n : \mathfrak{S}_n \longrightarrow [\![1, n]\!]$ est définie, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, par

$$Z_n(\sigma) = \text{le nombre d'orbites suivant } \sigma$$

   On pose $C_n = Z_n \circ S_n$. Montrer que

$$C_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{U_i = i\}}$$

   On pourra procéder par récurrence sur n.

4. Que vaut $\mathbb{E}(C_n)$?

5. Que vaut $\mathbb{V}(C_n)$?

6. Montrer que les variables aléatoires C_n et Z_n ont la même loi.

   L'espérance et la variance d'une variable aléatoire réelle ne dépendant que de sa loi, on retrouve la valeur de $\mathbb{E}(Z_n)$ calculée dans la partie I et on obtient $\mathbb{V}(Z_n) = \mathbb{V}(C_n)$.