

Partie I

1. Soit $G : x \mapsto \int_0^x P(t) dt$. La fonction G , primitive du polynôme P sur \mathbb{R} , est un polynôme.

(!) Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q' = P$ et $\int_0^1 Q = 0$. Comme Q est une primitive de P sur \mathbb{R} , il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $Q = G + c$. On a alors

$$0 = \int_0^1 Q = c + \int_0^1 G$$

et donc $c = -\int_0^1 G$, d'où l'unicité.

(\exists) Soit $c = -\int_0^1 G$. Soit $Q = G + c$. La fonction Q est un polynôme, $Q' = G' = P$ et

$$\int_0^1 Q = c + \int_0^1 G = 0$$

d'où l'existence.

2.

$$\begin{aligned} B_0 &= 1 \\ B_1 &= X - \frac{1}{2} \\ B_2 &= X^2 - X + \frac{1}{6} \\ B_3 &= X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X \\ B_4 &= X^4 - 2X^3 + X^2 - \frac{1}{30} \end{aligned}$$

3. Par une récurrence facile, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg B_n = n$ et le coefficient dominant de B_n est 1.

4. Soit $n \geq 2$. On a

$$B_n(1) - B_n(0) = \int_0^1 B_n' = n \int_0^1 B_{n-1} = 0$$

5. (a) On a $C_0 = B(1 - X) = B_0 = 1$. Soit $n \geq 1$. On a

$$C_n' = ((-1)^n B_n(1 - X))' = -(-1)^n B_n'(1 - X) = n(-1)^{n-1} B_{n-1}(1 - X) = nC_{n-1}$$

De plus, en posant $x = 1 - t$,

$$\int_0^1 C_n = (-1)^n \int_0^1 B_n(1 - x) dx = (-1)^n \int_0^1 B_n(t) dt = 0$$

On a donc $C_n = n\Phi(C_{n-1})$.

(b) Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_n = B_n$. On a $C_0 = B_0 = 1$. Soit $n \geq 1$. Supposons $C_{n-1} = B_{n-1}$. On a alors

$$C_n = n\Phi(C_{n-1}) = n\Phi(B_{n-1}) = B_n$$

(c) Par la question précédente, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(-1)^n B_n(1 - X) = B_n(X)$$

Si n est pair, alors $B_n(1 - X) = B_n(X)$. Le graphe de B_n est donc symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 1/2$. Si n est impair, alors $B_n(1 - X) = -B_n(X)$. Le graphe de B_n est donc symétrique par rapport au point $(1/2, 0)$.

(d) Soit $n \geq 3$ un entier impair. On a

$$B_n(1) = -B_n(1 - 1) = -B_n(0)$$

Or, $B_n(0) = B_n(1)$, donc $B_n(0) = B_n(1) = 0$.

Également,

$$B_n(1/2) = -B_n(1 - 1/2) = -B_n(1/2)$$

et donc $B_n(1/2) = 0$.

6. Montrons par récurrence sur m que pour tout $m \in \mathbb{N}$, le polynôme B_{2m+1} ne s'annule pas sur l'intervalle $]0, \frac{1}{2}[$.

On a $B_1 = X - 1/2$. Le polynôme B_1 ne s'annule qu'en $1/2$.

Soit $m \in \mathbb{N}$. Supposons que B_{2m+1} ne s'annule pas sur $]0, 1/2[$. Supposons qu'il existe $\alpha \in]0, 1/2[$ tel que $B_{2m+3}(\alpha) = 0$. Comme $2m+3 \geq 3$, on a $B_{2m+3}(0) = B_{2m+3}(1/2) = 0$. En appliquant Rolle à B_{2m+3} entre 0 et α , puis entre α et $1/2$, on obtient deux réels $0 < \beta < \alpha < \gamma < 1/2$ tels que

$$B_{2m+2}(\beta) = B_{2m+2}(\gamma) = 0$$

Appliquons Rolle à B_{2m+2} entre β et γ pour obtenir un réel δ tel que

$$0 < \beta < \delta < \gamma < 1/2$$

et tel que $B_{2m+1}(\delta) = 0$. Contradiction.

7. Pour $m \in \mathbb{N}$, notons

$$P_m = B_{2m}(X) - B_{2m}(0)$$

On a $P_0 = 0$. Si $m \neq 0$,

$$P'_m = B'_{2m} = 2mB_{2m-1}$$

P'_m ne s'annule pas sur $]0, 1/2[$ donc, par le TVI, P'_m est de signe constant sur $]0, 1/2[$. De là, P_m est strictement monotone sur $]0, 1/2[$. Or, $P_m(0) = 0$. Donc, P_m est de signe constant sur $]0, 1/2[$. Par les symétries de B_{2m} , ce signe est aussi celui de P_m sur $[1/2, 1]$.

Partie II

1. Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $t \in]0, 1[$. On a (somme des termes d'une suite géométrique)

$$S = \sum_{k=1}^N e^{2ik\pi t} = \frac{e^{2i(N+1)\pi t} - e^{2i\pi t}}{e^{2i\pi t} - 1}$$

En factorisant par $e^{i\pi t}$,

$$S = \frac{e^{i(2N+1)\pi t} - e^{i\pi t}}{2i \sin \pi t}$$

et donc

$$\operatorname{Re}(S) = \frac{\sin(2N+1)\pi t - \sin \pi t}{2 \sin \pi t} = \frac{\sin(2N+1)\pi t}{2 \sin \pi t} - \frac{1}{2}$$

De là,

$$1 + 2 \sum_{k=1}^N \cos(2k\pi t) = 1 + 2\operatorname{Re}(S) = \frac{\sin((2N+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}$$

2. (a) Par Taylor-Young, on a au voisinage de 0

$$\varphi_n(t) = \frac{tB'_n(0) + o(t)}{\sin \pi t} \sim \frac{B'_n(0) + o(1)}{\pi}$$

Ainsi, $\varphi_n(t)$ tend vers $B'_n(0)/\pi$ lorsque t tend vers 0.

(b) Comme $n \geq 2$, on a $B_n(0) = B_n(1)$. Posons $t = 1 - h$. On a

$$\varphi_n(t) = \frac{B_n(1-h) - B_n(1)}{\sin \pi(1-h)} = (-1)^n \frac{B_n(h) - B_n(0)}{\sin \pi h}$$

Lorsque t tend vers 1 (et donc h tend vers 0), cette quantité tend vers $(-1)^n B'_n(0)/\pi$.

(c) La fonction φ_n est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, 1[$ et pour tout $t \in]0, 1[$,

$$\varphi'_n(t) = \frac{B'_n(t) \sin \pi t - \pi(B_n(t) - B_n(0)) \cos \pi t}{\sin^2 \pi t} = \frac{A}{\sin^2 \pi t}$$

Faisons un DL de A à l'ordre 2 en 0.

$$\begin{aligned} A &= nB_{n-1}(t) \sin \pi t - \pi(B_n(t) - B_n(0)) \cos \pi t \\ &= (nB_{n-1}(0) + ntB'_{n-1}(0) + o(t))(\pi t + o(t^2)) - \pi(tB'_n(0) + \frac{1}{2}t^2B''_n(0) + o(t^2))(1 + o(t)) \\ &= (nB_{n-1}(0) + n(n-1)tB_{n-2}(0) + o(t))(\pi t + o(t^2)) - \\ &\quad \pi(ntB_{n-1}(0) + \frac{1}{2}n(n-1)t^2B_{n-2}(0) + o(t^2))(1 + o(t)) \\ &= n(n-1)\frac{\pi}{2}t^2B_{n-2}(0) + o(t^2) \end{aligned}$$

De là,

$$\varphi'_n(t) = \frac{n(n-1)\frac{\pi}{2}t^2B_{n-2}(0) + o(t^2)}{\sin^2 \pi t}$$

Le dénominateur est équivalent en 0 à $\pi^2 t^2$, donc $\varphi'_n(t)$ tend vers $n(n-1)B_{n-2}(0)/(2\pi)$.

Par un corollaire du théorème des accroissements finis, φ_n est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1[$.

Un calcul analogue montre que φ'_n a une limite finie en 1, et donc φ_n est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$.

3. Par une intégration par parties, on a pour tout $x > 0$,

$$\int_0^1 f(t) \sin xt \, dt = \frac{f(0) - f(1) \cos x}{x} + \frac{1}{x} \int_0^1 f'(t) \cos xt \, dt = A + B$$

On a

$$|A| \leq \frac{1}{x} (|f(0)| + |f(1)|)$$

et donc A tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. Également,

$$|B| \leq \frac{1}{x} \int_0^1 |f'(t)| \, dt$$

et donc B tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

4. (a) Soient $n \geq 2$ et $k \in \mathbb{N}^*$. En intégrant par parties,

$$\begin{aligned} I_{n,k} &= \frac{1}{2k\pi} [B_n(t) \sin(2\pi kt)]_0^1 - \frac{1}{2k\pi} \int_0^1 B'_n(t) \sin(2\pi kt) dt \\ &= -\frac{1}{2k\pi} \int_0^1 B'_n(t) \sin(2\pi kt) dt \end{aligned}$$

Intégrons à nouveau par parties.

$$\begin{aligned} I_{n,k} &= \frac{1}{4\pi^2 k^2} [B'_n(t) \cos(2\pi kt)]_0^1 - \frac{1}{4\pi^2 k^2} \int_0^1 B''_n(t) \cos(2\pi kt) dt \\ &= \frac{n}{4\pi^2 k^2} (B_{n-1}(1) - B_{n-1}(0)) - \frac{n(n-1)}{4\pi^2 k^2} I_{n-2,k} \end{aligned}$$

Si $n \geq 3$, le terme intégré est nul. Si $n = 2$, il vaut $1/(2\pi^2 k^2)$. Ainsi,

- Si $n \geq 3$, alors

$$I_{n,k} = -\frac{n(n-1)}{4\pi^2 k^2} I_{n-2,k}$$

- De plus,

$$I_{2,k} = \frac{1}{2\pi^2 k^2} - \frac{1}{2\pi^2 k^2} I_{0,k}$$

(b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On vérifie facilement que $I_{0,k} = I_{1,k} = 0$. De là, une récurrence sur m montre que

- Pour tout $m \in \mathbb{N}$, $I_{2m+1,k} = 0$.
- Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$,

$$I_{2m,k} = \frac{(-1)^{m-1} (2m)!}{(4\pi^2 k^2)^m}$$

5. (a) On a

$$\int_0^1 \varphi_{2m}(t) \sin((2N+1)\pi t) dt = \int_0^1 \varphi_{2m}(t) \left(1 + 2 \sum_{k=1}^N \cos(2\pi kt)\right) \sin \pi t dt$$

Si $t \neq 0, 1$, alors $\varphi_{2m}(t) \sin(\pi t) = B_{2m}(t) - B_{2m}(0)$. Cette égalité reste en fait valable si $t = 0$ ou $t = 1$ (les deux membres sont nuls). On a donc

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi_{2m}(t) \sin((2N+1)\pi t) dt &= \int_0^1 (B_{2m}(t) - B_{2m}(0)) \left(1 + 2 \sum_{k=1}^N \cos(2\pi kt)\right) dt \\ &= \int_0^1 B_{2m}(t) dt - B_{2m}(0) + 2 \sum_{k=1}^N I_{2m,k} \\ &\quad - 2B_{2m}(0) \sum_{k=1}^N \int_0^1 \cos(2\pi kt) dt \end{aligned}$$

L'intégrale de B_{2m} est nulle. Les intégrales des cosinus aussi. Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi_{2m}(t) \sin((2N+1)\pi t) dt &= -B_{2m}(0) + 2 \sum_{k=1}^N I_{2m,k} \\ &= -B_{2m}(0) + 2(-1)^{m-1} (2m)! \sum_{k=1}^N \frac{1}{(4\pi^2 k^2)^m} \\ &= -B_{2m}(0) + \frac{2(-1)^{m-1} (2m)!}{(4\pi^2)^m} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^{2m}} \end{aligned}$$

(b) Par II.3 et caractérisation séquentielle des limites, les intégrales ci-dessus tendent vers 0 lorsque N tend vers l'infini. Ainsi,

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{k^{2m}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (-1)^{m-1} \frac{2^{2m-1} \pi^{2m}}{(2m)!} B_{2m}(0)$$

(c) Prenons $m = 1$. On a $B_2(0) = 1/2$, d'où

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi^2 B_2(0) = \frac{\pi^2}{6}$$

Prenons $m = 2$. On a $B_4(0) = -1/30$, d'où

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^4} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{3} \pi^4 B_4(0) = \frac{\pi^4}{90}$$