

On considère l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}) \quad -x^2 y' + 2xy = y^2$$

-I-

$I =]\alpha, \beta[$ ($0 \leq \alpha < \beta \leq +\infty$) désigne un intervalle ouvert inclus dans $\mathbb{R}_+^*$. On se propose de déterminer les solutions de $(\mathcal{E})$ sur I qui ne s'annulent pas.

1. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable qui ne s'annule pas. On pose $g = \frac{1}{f}$. Montrer que f est solution de $(\mathcal{E})$ sur I si et seulement si g ne s'annule pas et g est solution sur I d'une équation linéaire $(\mathcal{E}')$ que l'on déterminera.
2. Résoudre $(\mathcal{E}')$ sur I .
3. En déduire les solutions de $(\mathcal{E})$ sur I qui ne s'annulent pas.

-II-

Soit f une solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui n'est pas identiquement nulle (mais qui peut éventuellement s'annuler). Soit $a > 0$ tel que $f(a) \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe un intervalle ouvert J , inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, contenant a et tel que f ne s'annule pas sur J .

On note $\mathcal{A}$ l'ensemble de tous les intervalles ouverts J inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, contenant a et tels que f ne s'annule pas sur J . On pose

$$I = \bigcup_{J \in \mathcal{A}} J$$

2. Montrer que $I \subset \mathbb{R}_+^*$, $a \in I$ et f ne s'annule pas sur I .
3. Montrer que I est un intervalle ouvert.
4. Soit $\alpha \geq 0$ la borne inférieure de I . On suppose $\alpha > 0$.
 - (a) En remarquant que f est une solution de $(\mathcal{E})$ sur I qui ne s'annule pas, montrer que $f(\alpha) \neq 0$.
 - (b) En déduire une contradiction.

Ainsi, $I =]0, \beta[$, où $0 < \beta \leq +\infty$.

5. Par un raisonnement analogue à celui de la question précédente (on ne demande pas de le faire), on peut montrer que $\beta = +\infty$, et donc que $I = \mathbb{R}_+^*$.

Déterminer toutes les solutions de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

6. Soient $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Combien existe-t-il de solutions f de $(\mathcal{E})$ telles que $f(x_0) = y_0$?
7. Dessiner sur un même graphe les courbes des solutions de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

-III-

On peut de même montrer (ne pas le faire) que les solutions de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}_-^*$ sont la fonction nulle et les fonctions $x \mapsto \frac{x^2}{x+k}$ où k est un réel négatif ou nul.

1. Déterminer toutes les solutions de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$.
2. Dessiner sur un même graphe les courbes des solutions de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$.