Dans tout le problème, a et b sont deux réels tels que $a < b$.

On note $S(a,b)$ l'ensemble des suites finies croissantes de points de $[a,b]$ possédant au moins deux termes. Pour toute fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et toute suite $\sigma = (t_0, t_1, \cdots, t_n) \in S(a,b)$ où $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S(f,\sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)|$$

On note

$$E(f) = \{S(f,\sigma), \sigma \in S(a,b)\}$$

La fonction f est dite *à variation bornée* sur $[a,b]$ lorsque l'ensemble $E(f)$ est majoré, et on appelle *variation totale* de f sur $[a,b]$ le réel

$$V_{a,b}(f) = \sup E(f)$$

On convient également, pour toute fonction f et tout réel a, que $V_{a,a}(f) = 0$.

On note $\mathcal{V}([a,b])$ l'ensemble des fonctions à variations bornée sur le segment $[a,b]$.

-I-

1. Soit f une fonction croissante sur $[a,b]$.
   (a) Démontrer que l'ensemble $E(f)$ est majoré par $f(b) - f(a)$.
   La fonction f est donc à variation bornée sur $[a,b]$ et $V_{a,b}(f) \leq f(b) - f(a)$.
   (b) Exhiber une suite $\sigma \in S(a,b)$ telle que $S(f,\sigma) = f(b) - f(a)$.
   (c) En déduire que $V_{a,b}(f) = f(b) - f(a)$.
2. Énoncer sans le démontrer un résultat analogue pour les fonctions décroissantes.
3. Soit $k \in \mathbb{R}_+$. Soit f une fonction k-lipschitzienne sur $[a,b]$. Démontrer que $f \in \mathcal{V}([a,b])$ et que $V_{a,b}(f) \leq k(b-a)$.
4. Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$.
   (a) Montrer l'existence de $M = \max\{|f'(x)|, x \in [a,b]\}$.
   (b) Montrer que $f \in \mathcal{V}([a,b])$ et que $V_{a,b}(f) \leq M(b-a)$.
5. Soient $f, g \in \mathcal{V}([a,b])$. Démontrer que $f + g \in \mathcal{V}([a,b])$ et que

$$V_{a,b}(f+g) \leq V_{a,b}(f) + V_{a,b}(g)$$

   Montrer par un exemple que cette inégalité peut être stricte.
6. Soit $f \in \mathcal{V}([a,b])$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lambda f \in \mathcal{V}([a,b])$ et que

$$V_{a,b}(\lambda f) = |\lambda| V_{a,b}(f)$$

7. Quelle est la structure de l'ensemble $\mathcal{V}([a,b])$?
8. On construit dans cette question une fonction continue qui n'est pas à variation bornée. Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par
   - $f(0) = 0$
   - $\forall n \geq 1, f(1/n) = (-1)^{n+1}/n$
   - $\forall n \geq 1$, f est affine sur l'intervalle $[1/(n+1), 1/n]$ (c'est à dire de la forme $x \longmapsto a_n x + b_n$ où $a_n, b_n \in \mathbb{R}$).

   (a) Tracer le graphe de f.
   (b) Montrer que f est continue sur $[0,1]$.

(c) Pour tout $n \geq 2$, soit

$$\sigma_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}, \cdots, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right) \in S(0,1)$$

Démontrer que pour tout $n \geq 2$, $S(f, \sigma_n) \geq H_n$, où

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

(d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$. En déduire que H_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers l'infini.

(e) Montrer que $f \notin \mathcal{V}([0,1])$.

-II-

Dans cette partie, f est une fonction à variation bornée sur le segment $[a,b]$.

1. Soient $\alpha, \beta \in [a,b]$ tels que $\alpha < \beta$. Montrer que $f \in \mathcal{V}([\alpha,\beta])$, et que

$$V_{\alpha,\beta}(f) \leq V_{a,b}(f)$$

2. On se donne $x, y \in [a,b]$ tels que $a < x < y \leq b$.

(a) Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. Soient $\sigma_1 = (t_0, \cdots, t_m) \in S(a,x)$ et $\sigma_2 = (u_0, \cdots, u_n) \in S(x,y)$. Soit $\sigma = (t_0, \cdots, t_m, u_0, \cdots, u_n)$. Démontrer que

$$S(f,\sigma_1) + S(f,\sigma_2) \leq S(f,\sigma)$$

En déduire, en justifiant soigneusement chaque étape du raisonnement, que

$$V_{a,x}(f) + V_{x,y}(f) \leq V_{a,y}(f)$$

(b) On se donne un réel $\varepsilon > 0$.

i. Démontrer qu'il existe $\sigma' \in S(a,y)$ tel que $S(f,\sigma') \geq V_{a,y}(f) - \varepsilon$.

ii. Soit $\sigma \in S(a,b)$ obtenue en rajoutant éventuellement x à σ'. Montrer que

$$S(f,\sigma) \geq S(f,\sigma') \geq V_{a,y}(f) - \varepsilon$$

iii. En décomposant σ de façon convenable, prouver que

$$V_{a,x}(f) + V_{x,y}(f) \geq V_{a,y}(f) - \varepsilon$$

(c) Démontrer la « relation de Chasles » :

$$V_{a,x}(f) + V_{x,y}(f) = V_{a,y}(f)$$

3. Soit $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in [a,b]$ par $\varphi(x) = V_{a,x}(f)$.

(a) Montrer que φ est croissante sur $[a,b]$.

(b) Montrer que pour tous $x, y \in [a,b]$,

$$x \leq y \implies \varphi(y) - \varphi(x) \geq |f(y) - f(x)|$$

(c) Montrer que $f - \varphi$ est décroissante et que $f + \varphi$ est croissante.

4. Démontrer le théorème suivant.

Théorème. *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. La fonction f est à variation bornée sur $[a,b]$ si et seulement si f est la somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante.*