Un *anneau de Boole* est un anneau $(\mathbb{A}, +, \times)$ tel que pour tout $x \in \mathbb{A}$, $x^2 = x$.

On se donne dans tout le problème un tel anneau $\mathbb{A}$. On note 0 et 1 les neutres de $\mathbb{A}$ pour l'addition et la multiplication.

-I-

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{A}$, $-x = x$.
2. Montrer que $\mathbb{A}$ est un anneau commutatif.

-II-

Soit $\leq$ la relation binaire sur $\mathbb{A}$ définie pour tous $x, y \in \mathbb{A}$ par

$$x \leq y \iff xy = x$$

1. (a) Démontrer que cette relation est une relation d'ordre.
   (b) Montrer que $\mathbb{A}$ possède un plus petit et un plus grand élément.
   (c) Montrer que si $\mathbb{A}$ contient au moins trois éléments, l'ordre $\leq$ est un ordre partiel.
2. Soient $x, y \in \mathbb{A}$.
   (a) Montrer que xy est le plus grand des minorants de l'ensemble $\{x, y\}$.
   (b) Montrer que $x + y + xy$ est le plus petit des majorants de l'ensemble $\{x, y\}$.

   On notera dorénavant $x \vee y = x + y + xy$.
3. Vérifier trois des propriétés ci-dessous :
   (a) $\vee$ est commutative.
   (b) $\vee$ est associative.
   (c) $\forall x \in \mathbb{A}, x \vee 0 = x$, $x \vee 1 = 1$.
   (d) Les opérations $\vee$ et $\times$ sont distributives l'une par rapport à l'autre.

-III-

Un élément a de $\mathbb{A}$ est appelé un *atome* lorsque $a \neq 0$ et, de plus,

$$\forall x \in \mathbb{A}, (x \leq a \implies (x = 0 \text{ ou } x = a))$$

1. Soit a un atome de $\mathbb{A}$. Montrer :

$$\forall x \in \mathbb{A}, ax = a \text{ ou } ax = 0$$

2. Soit a un atome de $\mathbb{A}$. Montrer :
   (a) $\forall x \in \mathbb{A}, a \leq x$ ou $a \leq 1 + x$.
   (b) $\forall x, y \in \mathbb{A}, a \leq xy \iff (a \leq x \text{ et } a \leq y)$
   (c) $\forall x, y \in \mathbb{A}, a \leq x \vee y \iff (a \leq x \text{ ou } a \leq y)$
   (d) Que dire lorsqu'on a une égalité du genre $a \leq x + y$?

On suppose jusqu'à la fin du problème que $\mathbb{A}$ est un anneau de Boole fini

3. (a) Soit E un ensemble fini non vide muni d'une relation d'ordre $\leq$. Montrer qu'il existe un élément E qui n'est strictement plus grand qu'aucun des éléments de E. *On pourra raisonner par récurrence sur le nombre d'éléments de E.*
   (b) Soit x un élément non nul de $\mathbb{A}$. Soit $m(x)$ l'ensemble des minorants non nuls de x. Montrer que $m(x)$ contient un atome.

On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des atomes de $\mathbb{A}$. On considère l'application $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{A})$ définie pour tout $x \in \mathbb{A}$ par

$$f(x) = \{a \in \mathcal{A}, a \leq x\}$$

4. Soient $x, y \in \mathbb{A}$. Montrer :
   (a) $f(xy) = f(x) \cap f(y)$.
   (b) $f(x \vee y) = f(x) \cup f(y)$.
   (c) $f(x + y) = f(x) \Delta f(y)$.
   (d) $x \leq y \implies f(x) \subset f(y)$.
5. Soit $x \in \mathbb{A}$ tel que $f(x) = \emptyset$. Montrer que $x = 0$. En déduire que f est injective.
6. Soit $Y = \{a_1, \ldots, a_p\} \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$. Soit $x = a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_p$. Prouver que $f(x) = Y$. Que vient-on de montrer ?
7. Déterminer tous les entiers $n \leq 2024$ pour lesquels il existe un anneau de Boole à n éléments. On justifiera soigneusement la réponse.