Dans tout le problème on note $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R}^*$ définie pour tout $x \neq -1$ par

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

On pose $\widetilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, où $\infty \notin \mathbb{R}$ est un objet sans signification particulière.

Pour chaque réel r on définit par récurrence une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (suite qui dépend donc de r), à valeurs dans $\widetilde{\mathbb{R}}$. On pose $u_0 = r$. Puis, pour tout entier naturel n,

- Si $u_n \neq -1$, alors $u_{n+1} = f(u_n)$.
- Si $u_n = -1$, alors $u_{n+1} = \infty$.
- Si $u_n = \infty$, alors $u_{n+1} = \infty$.

Lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq \infty$, on dit que r est *régulier*. Sinon, on dit que r est *exceptionnel*. Autrement dit, r est régulier si et seulement si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle.

Dans tout le problème r désigne un nombre réel.

-I-

1. (a) On prend dans cette question $r = -\frac{8}{5}$. Donner dans un tableau de 2 lignes la valeur des u_n pour $n \in [\![0, 6]\!]$. *Ainsi, $-\frac{8}{5}$ est exceptionnel.*
   (b) Montrer que si $r \geq 0$ alors r est régulier.
   (c) Montrer que $r = -\frac{5}{8}$ est régulier.
2. Montrer qu'il existe exactement deux réels $\ell \neq -1$ tels que $f(\ell) = \ell$. *On ne demande pas de calculer ces réels.*

On notera ces deux réels α et β dans tout le problème. On prendra de plus $\alpha < \beta$.

3. Étudier la fonction f et tracer son graphe. Dessiner également la droite d'équation « $y = x$ » et les points (α, α) et (β, β).
4. *Sans calculer α et β* $(\star)$:
   (a) Donner la valeur de $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$
   (b) Montrer que $\alpha < 0 < \beta$.
   (c) Montrer que $\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| < 1$.

   $(\star)$ *Vous pouvez répondre aux questions I.4.a, I.4.b et I.4.c en calculant α et β mais cela ne vous apportera que des complications.*
5. (a) Soit x un réel différent de -1. Montrer que $f(x) = \alpha$ si et seulement si $x = \alpha$.
   (b) Montrer : $r = \alpha \implies (\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha)$.
   (c) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, (u_n = \alpha \implies r = \alpha)$.

-II-

On se donne dans cette partie un réel r régulier et différent de α. Tous les u_n sont donc réels et, par I.5.c, différents de α. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$v_n = \frac{u_n - \beta}{u_n - \alpha}$$

1. Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{\beta}{\alpha} v_n$$

2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

-III-

On note E l'ensemble des réels exceptionnels.

Soit $g : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ la fonction définie pour tout réel $x \neq 0$ par

$$g(x) = \frac{1}{x} - 1$$

1. Montrer que f est bijective et que $f^{-1} = g$.

On définit par récurrence la suite $(w_n)_{n\geq 0}$ en posant $w_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = g(w_n)$.

On vérifie facilement que cette suite est bien définie et que tous les w_n sont des réels strictement négatifs.

2. Donner dans un tableau de 2 lignes les valeurs de w_n pour $n \in [\![0, 6]\!]$.
3. Montrer que $E = \{w_n, n \in \mathbb{N}\}$.

On définit par récurrence deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $a_0 = 1$, $b_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & a_n + b_n \\ b_{n+1} & = & a_n \end{array} \right.$$

4. Donner dans un tableau de 3 lignes les valeurs de a_n et b_n pour $n \in [\![0, 9]\!]$.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_n = -\frac{a_n}{b_n}$$

6. (a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.
   (b) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n en fonction de n, α et β.
   (c) En déduire, pour tout $n \geq 1$, w_n en fonction de n, α et β.
   (d) Prouver que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Quelle est sa limite ?