Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ par

$$f(z) = z^2 + z + 1$$

Soit $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application qui à tout point $m \in \mathbb{R}^2$ d'affixe z associe $F(m)$ d'affixe $f(z)$.

-I-

1. Quels sont les points invariants par F (c'est à dire les points $m \in \mathbb{R}^2$ tels que $F(m) = m$) ?
2. Quels sont les points ayant pour image le point d'affixe 3 ?
3. Quels sont les points ayant pour image le point d'affixe $3i + 2$?
4. Soient $m, m' \in \mathbb{R}^2$ d'affixes respectives $z, z' \in \mathbb{C}$ tels que $z \neq z'$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur z et z' pour que $F(m) = F(m')$. Que signifie géométriquement cette condition en termes du milieu du segment $[m, m']$?
5. Déterminer $F(\mathbb{R}^2)$.
6. Quels sont les points du plan ayant un et un seul antécédent par F ?

-II-

Dans cette partie, on se propose de déterminer les images directes et réciproques par F de quelques droites du plan.

1. Soit D_1 la droite d'équation $y = 0$.
   (a) i. Montrer que pour tout $m \in D_1$, $F(m) \in D_1$.
       ii. Soit $M \in D_1$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $m \in D_1$ tel que $F(m) = M$.
       iii. En déduire $F(D_1)$.
   (b) i. Soit $z \in \mathbb{C}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante simple pour que $f(z)$ soit un nombre réel.
       ii. En déduire $F^{-1}(D_1)$.
2. Soit D_2 la droite d'équation $x = 0$. Soit

$$\mathcal{P} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y^2 + x = 1\}$$

   (a) Dessiner $\mathcal{P}$.
   (b) Montrer que $F(D_2) = \mathcal{P}$.
   (c) Soit $z \in \mathbb{C}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante simple pour que $f(z)$ soit un imaginaire pur, puis donner une équation simple de la courbe $F^{-1}(D_2)$. On ne cherchera pas à tracer cette courbe.
3. (a) Soit D_3 la droite d'équation $y = x$. Déterminer $F(D_3)$. Dessiner la courbe obtenue.
   (b) Donner une équation simple de la courbe $F^{-1}(D_3)$. On ne cherchera pas à tracer cette courbe.