Dans tout le problème, les lettres A, B, C désignent des propositions.

Dans ce devoir, on étend la logique classique (que nous noterons $\mathcal{L}_2$) à une logique qui prend en compte, en plus de « vrai » (noté 1) et « faux » (noté 0), une troisième valeur de vérité, notée i (indéterminé). Une telle logique est ce que l'on appelle une *logique tri-valuée.*

La *logique de Łukasiewicz*, que nous noterons $\mathcal{L}_3$, est une logique tri-valuée dans laquelle les connecteurs $\neg$, $\wedge$, $\vee$ et $\Rightarrow$ sont définis par les tables de vérité ci-dessous.

A	$\neg A$
0	1
i	i
1	0

$\wedge$	0	i	1
0	0	0	0
i	0	i	i
1	0	i	1

$\vee$	0	i	1
0	0	i	1
i	i	i	1
1	1	1	1

$\Rightarrow$	0	i	1
0	1	1	1
i	i	1	1
1	0	i	1

Étant donnée une logique $\mathcal{L}$, on dit que deux propositions sont *équivalentes* dans la logique $\mathcal{L}$ lorsqu'elles ont la même table de vérité dans cette logique. On dit qu'une proposition est une *tautologie* dans la logique $\mathcal{L}$ lorsque, quelles que soient les valeurs de vérité des variables de cette proposition, celle-ci prend toujours la valeur de vérité 1.

1. Indiquer une proposition P_1 équivalente dans $\mathcal{L}_2$ à la proposition « $A \vee B$ » et n'utilisant pas d'autres connecteurs que $\neg$ et $\wedge$.
2. Les propositions P_1 et « $A \vee B$ » sont-elles équivalentes dans $\mathcal{L}_3$?.
3. Indiquer une proposition P_2 équivalente dans $\mathcal{L}_2$ à la proposition « $A \Rightarrow B$ » et n'utilisant pas d'autres connecteurs que $\neg$ et $\vee$.
4. Les propositions P_2 et « $A \Rightarrow B$ » sont-elles équivalentes dans $\mathcal{L}_3$?.
5. Déterminer (en détaillant son obtention) la table de vérité dans $\mathcal{L}_3$ de la proposition P_3 suivante :

$$((A \Rightarrow B) \wedge ((\neg A) \Rightarrow B)) \Rightarrow B$$

   La proposition P_3 est-elle une tautologie dans $\mathcal{L}_3$? Dans $\mathcal{L}_2$?
6. Montrer sans faire de table de vérité, en utilisant des propriétés du cours, que dans la logique $\mathcal{L}_2$ les propositions « $(A \vee B) \Rightarrow C$ » et « $(\neg A \wedge \neg B) \vee C$ » sont équivalentes.
7. Le sont-elles encore dans $\mathcal{L}_3$?
8. Peut-on faire un raisonnement par contraposition dans $\mathcal{L}_3$?
9. Peut-on faire un raisonnement par l'absurde dans $\mathcal{L}_3$?
10. On ordonne les valeurs de vérité par $0 < i < 1$. On considère une logique tri-valuée $\mathcal{L}$ vérifiant les 6 propriétés suivantes :
    (a) $\mathcal{L}$ est une extension de $\mathcal{L}_2$ pour les connecteurs $\neg$, $\wedge$, $\vee$ et $\Rightarrow$: autrement dit, les valeurs prises par ces 4 connecteurs pour les valeurs de vérité 0 et 1 sont les mêmes dans $\mathcal{L}_2$ et dans $\mathcal{L}$.
    (b) Le connecteur $\wedge$ est commutatif.
    (c) La proposition « $A \vee B$ » est équivalente à P_1.
    (d) La proposition « $A \Rightarrow B$ » est équivalente à P_2.
    (e) Pour toute valeur de vérité de la proposition B, $0 \wedge B \leq i \wedge B \leq 1 \wedge B$.
    (f) Les propositions $\neg\neg A$ et A sont équivalentes.

    Parmi les propriétés de a) à f), lesquelles sont vérifiées par la logique de Łukasiewicz ? Combien y a-t-il de telles logiques ?