

- Si  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe lorsque

$$\forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0, 1], f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

Fonctions concaves : l'inégalité est renversée.  $f$  est convexe si et seulement si  $-f$  est concave.

- Interprétation géométrique : la courbe est au-dessous des cordes. Inégalité de Jensen : généralisation à un barycentre de  $n$  points de l'intervalle  $I$  à coefficients positifs.
- Propriété de croissance des pentes :  $f$  est convexe sur  $I$  si et seulement si l'une des inégalités suivantes est vérifiée pour tous  $x, y, z \in I$  tels que  $x < y < z$  :

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

- Position du graphe d'une fonction convexe par rapport à ses sécantes.
  - Fonctions convexes dérivables : une fonction dérivable sur un intervalle est convexe si et seulement si sa dérivée est croissante. Une fonction deux fois dérivable est convexe si et seulement si sa dérivée seconde est positive. Une fonction dérivable est convexe si et seulement si sa courbe est au-dessus de ses tangentes.
-